

# Construction de lois a priori objectives pour l'estimation bayésienne de courbes de fragilité sismique

Antoine Van Biesbroeck,  
Clément Gauchy, Cyril Feau, Josselin Garnier

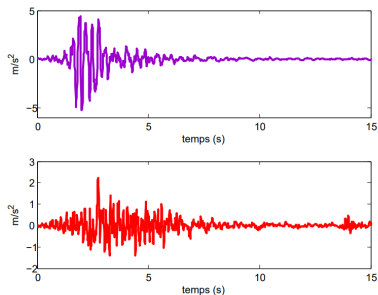
Commissariat à l'Energie Atomique et aux Energies Alternatives

10 juin 2022



- 1 Introduction
  - Indicateur de mesure sismique et de rupture
  - Courbes de fragilité
- 2 Information mutuelle et prior objectif
  - Prior de référence non asymptotique
  - Prior de référence asymptotique
- 3 Applications numériques
- 4 Caractère propre de Jeffreys
- 5 Conclusion

# Indicateur sismique et rupture

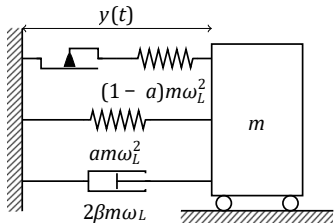


Signaux d'accélération sismique

Catégoriser le signal  $\mathbf{s}$  par un indicateur sismique :

- 1  $PGA = \max_{t \in [0; T]} |s(t)|$ ;
- 2  $PGV = \max_{t \in [0; T]} \int_0^t |s(\tau)| d\tau$  ;
- 3  $E = \int_0^T s^2(\tau) d\tau$  ;
- 4  $SA = 4 \pi^2 f_L^2 \max_{t \in [0; T]} |\ddot{y}(t)|$ .

Un modèle mécanique traduit ensuite la réponse de la structure au signal  $s$ .



modele mecanique

$$y''(t) + 2\beta y'(t) + \omega_L^2 y(t) = s(t)$$

On définit:

- 1 Le déplacement maximal :  $DM = \max_{t \in [0; T]} |y(t)|$ .
- 2 La rupture :  $\mathbf{1}_{DM > C}$

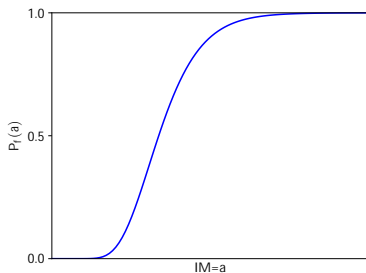


Figure: Exemple de courbe de fragilité sismique

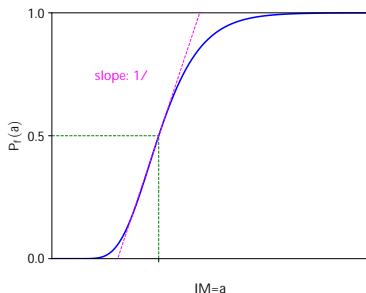


Figure: Exemple de courbe de fragilité sismique

Modele Log-Normal:

$$\log DM = c \log IM + d + N(0;1) \quad ! \quad P_f(a) = P(DM > c_j IM = a)$$
$$= \frac{\ln a}{\ln}$$

- L'etude revient a la recherche du parametre  $= ( ; )$ .

Base de données  $((a_1; z_1); \dots; (a_k; z_k))$   $a = IM$  et  $z \in \{0, 1\}^g$

- Méthode classique : Max de vraisemblance

$$\hat{MLE} = \arg \max l_k(z; a; ) = \arg \max \prod_{i=1}^k p(z_i; a_i; )$$

! Obtention de différents échantillons de  $\hat{MLE}$  par bootstrap.

! Pb : Irregulier avec peu de donnees

Base de données  $((a_1; z_1); \dots; (a_k; z_k))$   $a = IM$  et  $z \in \{0; 1\}^g$

- Méthode classique : Max de vraisemblance

$$\hat{MLE} = \arg \max l_k(z; a) = \arg \max \prod_{i=1}^k p(z_i; a_i)$$

! Obtention de différents échantillons de  $\hat{MLE}$  par bootstrap.

! Pb : Irregulier avec peu de données

- Point de vue Bayésien: est une variable aléatoire de loi

La loi a posteriori :  $p(z; a) \propto l_k(z; a) \pi(z)$   
 $\propto \prod_{i=1}^k p(z_i; a_i) \pi(z)$

! Obtention de différents échantillons de  $p$  par simulation de  $p$

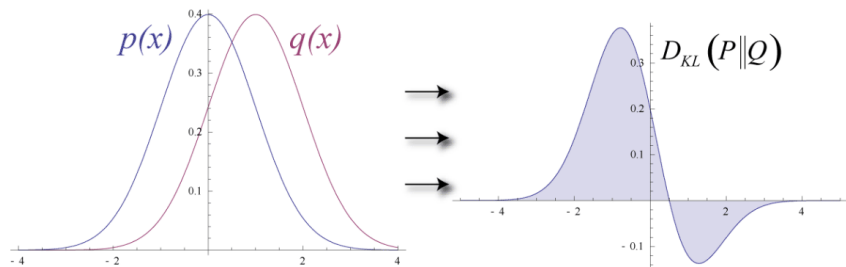
! Pb : Comment choisir le prior ?



# Information mutuelle et prior objectif

## Introduction au prior de reference

Idée: Maximiser l'information apportée par les données par rapport au prior. i.e. maximiser  $KL(p(ja; z) || j)$ .



# Information mutuelle et prior objectif

## Introduction au prior de reference

Idée: Maximiser l'information apportée par les données par rapport au prior. i.e. maximiser  $KL(p(j|a; z) || p(j))$ .

Définition (Information attendue moyenne)

$$\begin{aligned} I(j|A) &= \int_{\mathcal{Z}} KL(p(j|a; z) || p(j)) dP_{A;Z}(a; z) \\ &= \int_A \int_{\mathcal{Z}} I_k(z|j; a) \log \frac{I_k(z|j; a)}{I_k(z|j; a)} d\mathcal{C}(z) dP_A(a) \end{aligned}$$

$\mathcal{C}$  = mesure de comptage sur  $\mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, g^k\}$

# Information mutuelle et prior objectif

## Introduction au prior de reference

Idée: Maximiser l'information apportée par les données par rapport au prior. i.e. maximiser  $KL(p(ja; z) || j)$ .

Définition (Information attendue moyenne)

$$I(j || M^k) = \int_Z KL(p(ja; z) || j) dP_{A;Z}(a; z)$$
$$= \int_A \int_Z I_k(zja; ) \log \frac{I_k(zja; )}{I_k(zja; ) d( )} d( ) dc(z) dP_A(a):$$

$c =$  mesure de comptage sur  $Z = \{0; 1\}^k$

Définition (Prior de référence sur  $P$ )

Le prior de référence sur une classe de priors  $P$  est

$$j_k = \arg \max_{j \in P} I(j || M^k)$$

[Bernardo 1979] "Reference Posterior Distributions for Bayesian Inference".

## Théorème (Expression implicite de )

Sous certaines hypothèses de régularité et

$$P = P_1 \setminus f \ll ; d = d \in C^0 g:$$

$$\rho_k = \frac{d}{d} \setminus f = \exp \int l_k(z; a) \log \text{post}_k(a; z) dc(z) dP_A(a) :$$

$$\text{Et si } P = P_1 \setminus f ; \int_{\mathbb{R}} g_i d = c_i g:$$

$$\rho_k \setminus f = \exp \prod_{i=1}^n g_i$$

## Théorème (Expression implicite de )

Sous certaines hypothèses de régularité et

$$P = P_1 \setminus f \ll ; d = d \geq 2 \in C^0 g:$$

$$\rho_k = \frac{d}{d} \frac{k}{f} = \exp \int l_k(z; a; ) \log \text{post}_k( j; a; z) dc(z) dP_A(a) :$$

$$\text{Et si } P = P_1 \setminus f ; \int g_i d = c_i g:$$

$$\rho_k \setminus f = \exp \sum_{i=1}^n g_i$$

Approximation de  $\text{post}_k$ :

$$\text{post}_k( j; a; z) \approx h_k( j; z; a) = \frac{\int l_k(z; a; ) h( )}{\int l_k(z; a; ) h( ) d}$$

### Définition (Prior de référence asymptotique)

est le prior de référence asymptotique sur  $P$  si  $\mathcal{S} \subset P$ ;  $\mathcal{S} = \bigcup_i \Theta_i = \Theta$  union de compacts:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \frac{I(\cdot | jM^k)}{I(\cdot | iM^k)} = 0$$

### Définition (Prior de référence asymptotique)

est le prior de référence asymptotique sur  $P$  si  $\mathcal{B} \subset P$ ;  $\mathcal{B} = \bigcup_i \Theta_i = \Theta$  union de compacts:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} I(\cdot | \mathcal{M}^k) - I(\cdot | \mathcal{M}^k) = 0$$

### Proposition

- Si  $P$  est convexe ce prior est unique.
- Si  $\mathcal{B} \subset \Theta$  il existe un estimateur faiblement consistant de  $\mathcal{B}$ , alors le prior de référence existe.

---

[Muré 2018] “Objective Bayesian analysis of Kriging models with anisotropic correlation kernel”. Université Sorbonne Paris Cité.

### Théorème

*Sous certaines hypotheses de regularite et sur le choix de  $h$ :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\cdot) = \exp \int_{\mathcal{Z}} l_k(z; a) \log h_k(z; a) d\mathcal{P}_A(a)$$



# Information mutuelle et prior objectif

## Prior de reference asymptotique

### Théorème

*Sous certaines hypotheses de regularite et sur le choix de  $h$ :*

$$\lim_{k \rightarrow 1} f_k(\cdot) = \exp \int_Z l_k(z; a) \log h_k(z; a) d\mathcal{P}_A(a)$$

### Théorème

*Le prior de Jeffrey  $J(\cdot) = \frac{1}{j \det I(\cdot)}$  est le prior de reference asymptotique.*

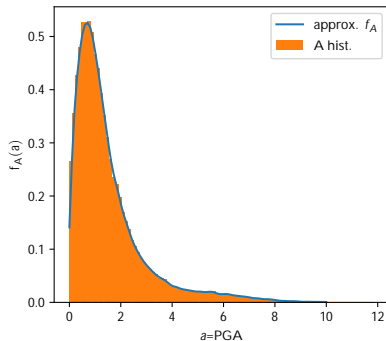
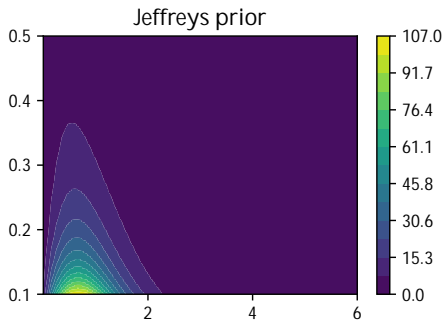
### Définition (Rappel : Information de Fisher)

Considérant la vraisemblance  $l(x_j)$ , l'information de Fisher est :

$$I(\cdot)_{ij} = \int_X l(x_j) \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log l(x_j) dx$$

# Applications numériques

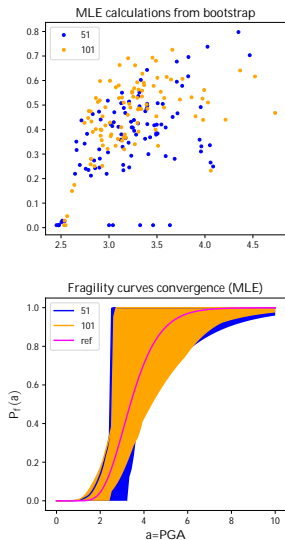
Prior/posterior de Jeffrey



Prior de Jeffrey et densité de  $A$ .

# Applications numériques

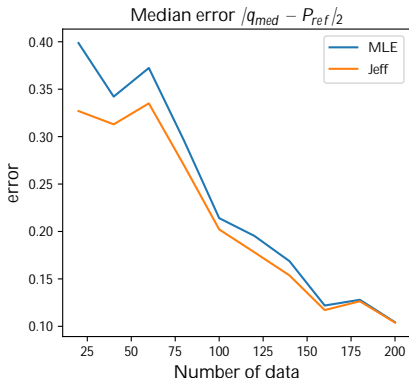
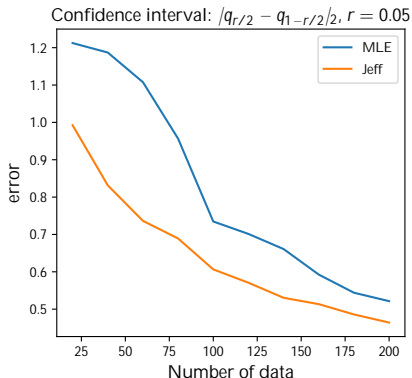
## Estimation de courbes de fragilité



Comparaison des methodes MLE / Je .

# Applications numériques

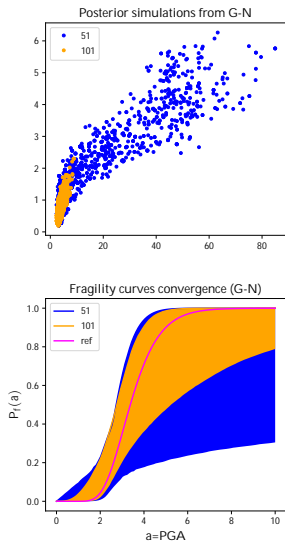
## Convergence des courbes de fragilité



Pour chaque simulation : 10000 jeux de données sont générés artificiellement par bootstrap et 10000 sont générés selon le posterior via MCMC.

# Applications numériques

## Comparaison avec un prior Gamma-Normal



Comparaison des simulations selon G-N / Jeff.

# Caractère propre de Jeffreys lorsque $\theta \neq 0$

## Developpement asymptotique de la vraisemblance

On rappelle la vraisemblance :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n \Phi(\theta)^{z_i} (1 - \Phi(\theta))^{1 - z_i} \\ &= \exp \left( \sum_{i=1}^n (z_i \log \Phi(\theta) + (1 - z_i) \log(1 - \Phi(\theta))) \right) \end{aligned}$$

Avec  $\eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$ .

# Caractère propre de Jeffreys lorsque $\theta \neq 0$

## Développement asymptotique de la vraisemblance

On rappelle la vraisemblance :

$$\begin{aligned}
 L(\theta) &= \prod_{i=1}^n p(z_i | a_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \Phi(\theta | z_i) (1 - \Phi(\theta | z_i))^{1 - z_i} \\
 &= \exp \left( \sum_{i=1}^n (z_i \log \Phi(\theta | z_i) + (1 - z_i) \log(1 - \Phi(\theta | z_i))) \right)
 \end{aligned}$$

Avec  $\theta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n z_i$ .

### Proposition (Développement asymptotique de la vraisemblance)

$$\begin{aligned}
 L(\theta) &\underset{\theta \neq 0}{\sim} C \frac{e^{\frac{K}{2} + o(1)}}{(2\pi)^{N/2}} \quad C; K; N > 0 \\
 &\underset{\theta \neq 0}{=} O \left( N e^{-\frac{K}{2}} \right) ;
 \end{aligned}$$

## Théorème (Caractère impropre du prior de Jeffreys)

Supposons que  $A \sim LN(\mu; \sigma^2)$  i.e.  $f_A(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log a - \mu)^2}{2\sigma^2}}$ .  
Alors le prior de Jeffreys est impropre.

$$J(a) \propto \frac{1}{a^3} \quad (1)$$



## Théorème (Caractère impropre du prior de Jeffreys)

Supposons que  $A \sim LN(\mu; \sigma^2)$  i.e.  $f_A(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log a - \mu)^2}{2\sigma^2}}$ .  
Alors le prior de Jeffreys est impropre.

$$J(\mu) \int_0^{\infty} E^{\theta} \mu^{3-2} \quad (1)$$

## Corollaire (Caractère propre du posterior)

Sous les mêmes hypothèses la loi a posteriori est bien une loi de probabilité.

- Etude théorique des résultats sur le prior de référence.
- Application au contexte des courbes de fragilité sismique et calcul du prior de Jeffrey.
- Résultats numériques sur un cas pratique du CEA qui démontrent:
  - Une suppression des irrégularités qu'impliquent la méthode classique du MLE.
  - Une convergence des estimations issue du prior de Jeffrey, qui est meilleure que celle obtenue avec les autres méthodes étudiées.
- Validation mathématiques des bonnes propriétés des lois simulés.

FIN

# Annexe

## Algorithme de Metropolis-Hasting adaptatif

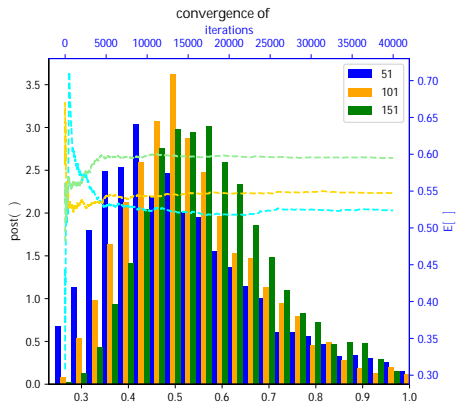
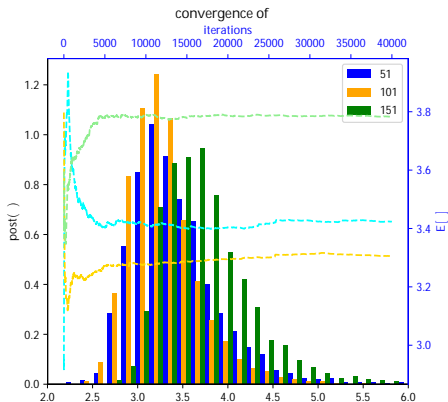
**Require:**  $\pi$  : target distribution  
 $t_0$ : Markov chain initialization  
 $N_{iter}; N_{step}; \rho; b; S$ : calibration parameters

**for**  $k = 1 :: N_{iter}$  **do**  
  **if**  $k < N_{step}$  **then**  
     $t = t_{k-1} + N(0; \rho I)$   
  **else**  
     $t = t_{k-1} + s(1 - b)N(0; \hat{\Sigma}_{k-1}) + bN(0; \rho I)$   
  **end if**  
   $\alpha_k = \alpha(t) = \alpha(t_{k-1})$   
   $t_k = t$  with probability  $\alpha_k$ ,  $t_k = t_{k-1}$  otherwise  
   $m_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i$   
   $\hat{\Sigma}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (t_i - m_k)(t_i - m_{k+1})^T$   
**end for**

**Ensure:**  $t, \alpha$  : Markov chain and acceptance rates sequences

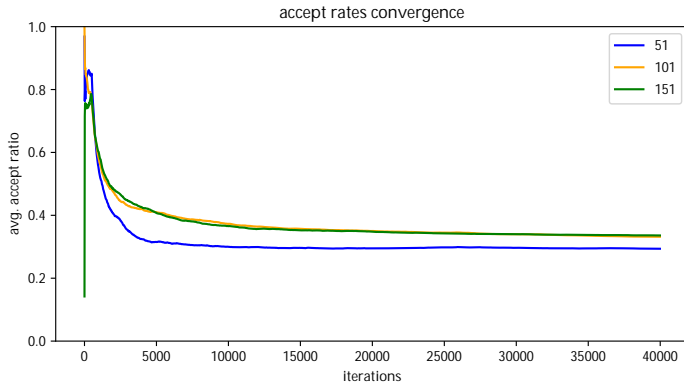
# Annexe

## Convergence du MH



# Annexe

## Convergence du MH



# Annexe

## Comparaison visuelle des medianes

