Modèles hiérarchiques : quelle loi a priori pour le modèle de variance ?

Jean-Louis Foulley et Jean-Michel Marin

INRA Jouy-en-Josas

Institut de Mathématiques et Modélisation
Université Montpellier 2

Modèle linéaire mixte de base

Pour tout $i = 1, \ldots, I$ et $j = 1, \ldots, J$:

$$y_{ij} = \theta + u_i + \epsilon_{ij} \ ,$$

avec

$$u_i \sim \mathcal{N}_1(0, \sigma^2) \ ,$$

$$\epsilon_{ij} \sim \mathcal{N}_1(0, \tau^2) \ ,$$

et $\theta \in \mathbb{R}$.

$\mathbf{y} = (y_{11}, \ldots, y_{IJ})$ et $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_I)$:

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{u}, \theta, \tau^2) = (2\pi\tau^2)^{-IJ/2} \exp\left(-0.5\tau^{-2} \sum_{i,j} (y_{ij} - \theta - u_i)^2)\right) ,$$

et

$$f(\mathbf{u}|\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-I/2} \exp\left(-0.5\sigma^{-2} \sum_i u_i^2\right) .$$

On obtient :

$$f(\mathbf{y}|\theta,\tau^2,\sigma^2) = (2\pi)^{-IJ/2}\sigma^{-I}\tau^{-IJ}(J\tau^{-2}+\sigma^{-2})^{-I/2}$$

$$\times\exp\left(-0.5\tau^{-2}\sum_{i,j}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2\right)$$

$$\times\exp\left(-J/(2(\tau^2+\sigma^2 J))\sum_i(\bar{y}_{i\cdot}-\theta)^2\right),$$

où $\bar{y}_{i\cdot} = \sum_j y_{ij}/J$.

On en déduit la loi a priori de Jeffreys pour (θ,τ^2,σ^2) :

$$\pi^J(\theta,\tau^2,\sigma^2) \propto \tau^{-2}\sigma^{-2}\,.$$

Question $\pi^J(\theta, \tau^2, \sigma^2|\mathbf{y})$ existe-t-elle ?

$$\pi^J(\theta, \tau^2, \sigma^2|\mathbf{y}) \propto \sigma^{-2-I}\tau^{-2-IJ}(J\tau^{-2} + \sigma^{-2})^{-I/2}$$

$$\times \exp\left(-0.5\tau^{-2}\sum_{i,j}(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2\right)\exp\left(-J/(2(\tau^2 + \sigma^2 J))\sum_i(\bar{y}_{i\cdot} - \theta)^2\right) ,$$

$$\pi^J(\tau^2,\sigma^2|\mathbf{y}) \propto \sigma^{-2-I}\tau^{-2-IJ}(J\tau^{-2}+\sigma^{-2})^{-I/2}(\tau^2+J\sigma^2)^{1/2}$$

$$\times \exp\left(-0.5\tau^{-2}\sum_{i,j}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2\right)\exp\left(-J/(2(\tau^2+\sigma^2 J))\sum_i(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y})^2\right) ,$$

où $\bar{y}=\sum_{i,j} y_{ij}/(IJ)$.

Ainsi la loi a posteriori de (θ,τ^2,σ^2) n'existe pas. En effet, pour $\tau \neq 0$, $\pi^J(\tau^2,\sigma^2|\mathbf{y})$ se comporte comme σ^{-2} au voisinage de 0 !

Choix de lois a priori pour le paramètre σ^2

1) **Uniforme**

1.1) sur un compact, choix de la borne supérieure ?

1.2) sur $\mathbb{R}_+^*$: le mode de la loi a posteriori est égal au REML. Attention les estimateurs MAP ne correspondent à aucune fonction de perte ; Par ailleurs, Gelman (2006) :

"*Another noninformative prior distribution sometmes proposed in the Bayesian literature is uniform on σ^2. We do not recmmmend this, as it seems to have the miscalibration toward higher values and also requires $I \geq 4$ groups for a proper posterior distribution.*"

2) **Inverse Gamma (lois conjuguées)**

2.1) $\mathcal{IG}(\epsilon, \epsilon)$ avec ϵ suffisamment petit, ϵ doit être calibré en fonction de la somme des carrés résiduels ;

2.2) $\mathcal{IG}(0.5\eta, 0.5\eta\zeta^2)$ permet d'inclure de l'information a priori ;

3) **Half Cauchy prior** Gelman (2006).