Enseigner l'inférence bayésienne aux débutants : l'analyse des données expérimentales

Journée AppliBugs du 26 Novembre 2009

Bruno Lecoutre

C.N.R.S. et Université de Rouen

E-mail: bruno.lecoutre@univ-rouen.fr

Internet: http://www.univ-rouen.fr/LMRS/Persopage/Lecoutre/Eris

Equipe **R**aisonnement **I**nduction **S**tatistique

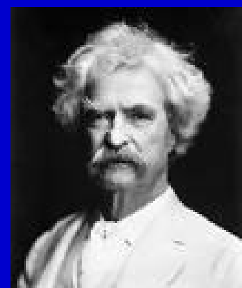
« I stopped teaching frequentist methods when I decided that they could not be learned »

Berry D. A. (1997) - Teaching elementary Bayesian statistics with real applications in science. *The American Statistician*, **51**, 241-246

« Students exposed only to a Bayesian approach […] come to understand the frequentist concepts of confidence intervals and P values better than do students exposed only to a frequentist approach »

« *Habit is habit and not to be flung out of the window by any man, but coaxed downstairs a step at a time* »

Mark Twain



☹ DE NOUVELLES DIFFICULTÉS ?

☺ AVANTAGES DE L'APPROCHE BAYÉSIENNE

? POINTS DE CHOIX

QUELQUES LIGNES DIRECTRICES POUR L'ENSEIGNEMENT

UN EXEMPLE D'INTRODUCTION
AUX PROCÉDURES FREQUENTISTES ET BAYÉSIENNES

UN PEU DE PRATIQUE
ILLUSTRATION DE PROGRAMMES INFORMATIQUES

DE NOUVELLES DIFFICULTÉS ?

☹

« Bayesian reasoning is considerably more difficult to assimilate than the reasoning of standard inference »

Moore D.S. (1997) - Bayes for Beginners? Some pedagogical questions. *In* S. Panchapakesan and N. Balakrishnan (eds.), *Advances in Statistical Decision Theory*, 3-17, Birkhäuser

Moore, D.S. (1997). Bayes for Beginners? Some reasons to hesitate. *The American Statistician*, *51*, 254-261

« Bayesian statistics is difficult
in the sense that thinking is difficult »

Berry (1997)

DE NOUVELLES DIFFICULTÉS ?

DÉTERMINATION DE LA DISTRIBUTION *A PRIORI*
CARACTÈRE SUBJECTIF

approche « subjective » ?

Berry propose de mettre l'accent sur le fait que les distributions *a priori* et *a posteriori* sont **subjectives**

Il oblige les étudiants à formuler leur probabilités *a priori*, tout en reconnaissant les difficultés de cette tâche

☹

« they don't like it »

Berry (1997)

Pour le moins le rôle des probabilités subjectives doit être clarifié

D'Agostini, G. (1999). Teaching statistics in the physics curriculum. Unifying and clarifying role of subjective probability. *American Journal of Physics*, *67*, 1260-1268

MAIS

« A common misconception is that Bayesian analysis is a subjective theory; this is **neither true historically nor in practice**. The first Bayesians, Bayes […] and Laplace […] performed Bayesian analysis using a constant prior distribution for unknown parameters »

Berger (2004)

DE NOUVELLES DIFFICULTÉS ?

DE NOUVEAUX CONCEPTS PROBABILISTES?

☹

Les méthodes bayésiennes nécessitent de nouveaux concepts probabilistes, en particulier la définition bayésienne de la probabilité, les probabilités conditionnelles et la formule de Bayes

☺

La plupart des utilisateurs interprètent les seuils de signification et la confiance fréquentiste en termes bayésiens

↳ Ces « nouveaux concepts » sont déjà – au moins implicitement – mis en œuvre dans l'utilisation des méthodes fréquentistes

↳ L'enseignement de l'approche bayésienne demande simplement de montrer que ces concepts peuvent être utilisée de manière appropriée et cohérente dans l'analyse statistique

Au lieu de « masquer » ces concepts, on les met en avant

La définition bayésienne de la probabilité

Confusions entre les différentes notions de probabilité chez les étudiants

Albert J. (2003) - College students' conceptions of probability. *The American Statistician,* **57**, 37-45

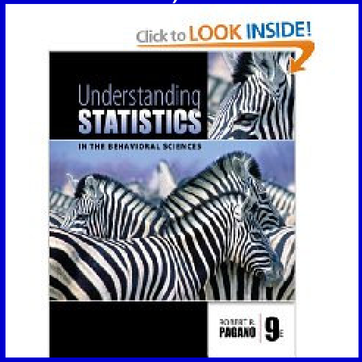
Enseigner (uniquement) les tests de signification et les intervalles de confiance fréquentistes ne peut qu'ajouter à la confusion

- justification par des arguments fréquentistes
- (més)interprétation en termes bayésiens

Duplicité de la plupart des enseignants en statistique
Les interprétations *hérétiques* (bayésiennes) sont tolérées, sinon encouragées par les fréquentistes

95% confidence interval: « *an interval such that the probability is* 0.95 *that the interval contains the population value* » (page 288)

Pagano R. R. (1990) - *Understanding Statistics in the Behavioral Sciences* (3rd edition). West



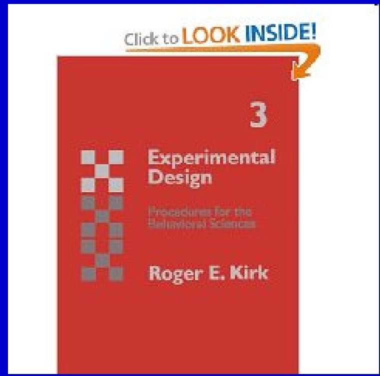
Probabilités conditionnelles

Même des utilisateurs expérimentés confondent
« la probabilité [*conditionnelle*] de commettre une erreur de Type I si l'hypothèse nulle est vraie » et la « probabilité *marginale* de commettre un erreur de Type I »

La plupart des présentations fréquentistes sont pour le moins ambiguës
Ainsi on parle de

« the probability of making a Type I [Type II] error »

par exemple Kirk (1982), pages 36-37



en omettant l'argument conditionnel

« given H0 [H1] »

☺

« The definition of conditional probability is intuitive for many people »

Berry (1997)

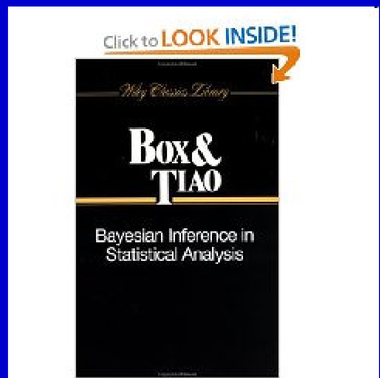
« The notion of conditional probability is a basic tool of probability theory, and it is unfortunate that <u>its great simplicity</u> is somewhat obscured by a singularly clumsy terminology »

Feller (1968, page 114)

Formule de Bayes

La formule de Bayes est facilement comprise si elle est introduite
à partir de tableaux de contingence
avec des probabilités interprétées comme des fréquences
(les probabilités *a priori* peuvent être supposées connues)

Box & Tiao (1973) page 12



AVANTAGES
DE L'APPROCHE BAYÉSIENNE

☺

« Our statistical teaching and consulting experience revealed us that these methods were far more intuitive and much closer to the thinking of scientists than frequentist procedures »

Lecoutre B.(2006) - Training students and researchers in Bayesian methods for experimental data analysis. *Journal of Data Science*, **4**, 207-232.

Procédures fréquentistes

Difficile de trouver des justifications *intuitives* (autres que bayésiennes!)

☹

Utilisation mystérieuse et irréaliste de la distribution d’échantillonnage

Difficultés de compréhension :
« Pourquoi doit on calculer la probabilité des échantillons plus extrêmes que celui que l’on a observé? »

> « Frequentist methods are nearly impossible to understand, even for the best students »
>
> Berry (1997)

Procédures bayésiennes

On peut donner des justifications et interprétations intuitives

☺

Seules les les probabilités d’échantillonnage des données observées interviennent dans la distribution *a posteriori*

☺

Appliquer les procédures bayésiennes à l’aide de programmes informatiques permet une compréhension empirique des concepts de probabilité

Le niveau des justifications mathématiques peut être facilement adapté aux connaissances des étudiants

L’approche bayésienne permet aux étudiants de surmonter beaucoup des difficultés rencontrées avec l’approche fréquentiste

☺ Mieux apprécier la variabilité d'échantillonnage

Les deux notions de distribution *a posteriori* et de distribution prédictive de données futures, conditionnellement aux données disponibles, permettent aux étudiants de prendre conscience des conceptions erronées sur la réplication des expériences (montrées par des études empiriques)

Surestimation de la probabilité de répliquer une résultat significatif

Tversky & Kahneman (1971); M.-P. Lecoutre & Rouanet (1993)

« many leading researchers in psychology, behavioural neuroscience, and medicine hold the confidence level misconception that a 95% CI will on average capture 95% of replication means, underestimating the extent that future replications will vary »

Cumming *et al.* (2004)

Etudier de manière interactive différentes distributions *a priori* et comparer les distributions *a posteriori* avec une solution bayésienne « objective » donne aux étudiants une compréhension intuitive sur les rôles relatifs de la taille de l'échantillon, des données et de l'information extérieure

Etudier les distributions prédictives *a posteriori*, en variant les effectifs respectifs des données disponibles et des données futures donne une compréhension intuitive du rôle de la taille de l'échantillon

☺ Surmonter les difficultés de la logique des tests

☹

Tests de signification usuels de l'hypothèse nulle : l'hypothèse à démontrer doit être l'hypothèse alternative

☺

Cet artifice peut être complètement évité
L'approche bayésienne fournit des réponses *directes* :
« Quelle est la probabilité que la différence entre deux moyennes soit grande, petite, etc ? »

Utiliser les interprétations bayésiennes des tests de signification et des intervalles de confiance dans la langage naturel des probabilités sur les effets inconnus est très naturel pour les étudiants

☺ Mieux préparer les étudiants à lire des publications expérimentales

En fait, l'approche bayésienne correspond mieux que l'approche fréquentiste à la manière de rapporter les résultats expérimentaux

Dans la pratique usuelle, les résultats des tests statistiques sont généralement donnés et commentés sans aucune référence aux concepts de base de leur raisonnement (hypothèse nulle, seuil α…)

L'approche bayésienne permet aux étudiants une lecture intelligente et critique

Les mauvais usages des tests sont beaucoup mieux compris
En particulier les étudiants deviennent rapidement conscients que les résultats non significatifs ne peuvent pas être interprétés comme « preuve de l'absence d'effet »

☺

« Elementary bayesian inference can be taught effectively to undergraduate students »

« Students benefit greatly from such instruction »

Berry (1997)

Voir aussi

Albert J. (1995) - Teaching inference about proportions using Bayes and discrete models. *Journal of Statistics Education*, **3**

Albert J. (1997) - Teaching Bayes' rule: a data-oriented approach. *The American Statistician*, **51**, 247-253

POINTS DE CHOIX

Approche « subjective » ou « objective »?

☹

Ce n’est pas une bonne stratégie d’attirer d’emblée l’attention des étudiants sur une approche qui ne répond pas à leurs attentes

☺

Centrer d’abord l’enseignement sur des procédures objectives (« non-informatives »)

Dans un second temps, on peut motiver l’introduction d’*a priori* « informatifs »

Impact de distributions « sceptiques » (*handicap*) : est-ce que les données apportent une évidence suffisante pour les contrebalancer ?

Prise en compte de résultat d’expériences antérieures

Formalisation d’opinions *a* priori d’experts dans le domaine
Mais cela nécessite un contexte précis et des techniques appropriées

pour un exemple dans les essais cliniques: Tan *et al.* (2003)

Enseigner ou non les méthodes fréquentistes?

Ne pas enseigner les méthodes fréquentistes ?

Berry (1997)

Confusions avec le raisonnement du test de signification

Exemple

Certains étudiants concluent de la distribution *a posteriori* que la différence *observée* est grande

un résultat est significatif si la différence observée est « en un certain sens » grande

😐

Difficilement réaliste dans le contexte actuel !

☹

Pire encore : deux enseignements indépendants…

« By introducing the Bayesian paradigm students are better able to interpret an observed significance level correctly »

« By introducing the Classical paradigm students are able to understand that subjectivity is not reserved for the Bayesian paradigm »

Stangl D. K. (1998) - Classical and Bayesian paradigms: can we teach both?
In Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics.
Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

QUELQUES LIGNES DIRECTRICES POUR L'ENSEIGNEMENT

QUESTIONNAIRE

Réflexions

probabilités fréquentistes et bayésiennes

paramètre et statistique

incertitude liée à l'échantillon (distribution d'échantillonnage)
et incertitude liée au paramètre inconnu

Questionnaire

Hasard

Pensez-vous que le hasard intervient ou non dans les situations suivantes?

> Le fait de tirer simultanément 2 jetons rouges d'une boîte qui contient 1 jeton blanc et 2 jetons rouges

Large consensus pour dire que le hasard intervient, parce qu'il est possible de calculer « facilement » une probabilité

> Le fait qu'il pleuve demain à Paris

Réponses partagées

Le hasard intervient parce qu'un raisonnement probabiliste est en jeu, mais il est difficile de calculer une probabilité

Questionnaire

- Prédictions probabilistes

Une boîte contient 1 jeton blanc et 2 jetons rouges

Pensez vous-qu'il soit :

- plus probable d'obtenir deux jetons rouges
- plus probable d'obtenir un jeton blanc et un jeton rouge
- aussi probable…

on a effectué 100 tirages successifs de 2 jetons (tirés simultanément) et

On a obtenu : 64 fois un blanc et un rouge et 36 fois deux rouges

Questionnaire

Prédictions statistiques

Résultat d'un vote dans une large population :

Urne avec deux types de bulletins

Sur la base du résultat d'un premier échantillon, prédire le résultat

- d'un échantillon futur
  - de même taille
  - de taille différente
- de toute la population

Questionnaire

- Commenter des extraits de publications expérimentales

Extrait de l'Année Psychologique

Alors qu'il n'y a pas de différence entre les attitudes rapportées par les étudiants des deux universités en première année, $t(221) = 1.01$, *ns*, cette différence est significative en quatrième année, $t(221) = -2.11$, $p < .04$.

UN EXEMPLE D'INTRODUCTION AUX PROCÉDURES FRÉQUENTISTES ET BAYÉSIENNES

Une situation simple

Une population finie : $N = 20$
Variable dichotomique
1 (succès) – 0 (échec)
Proportion φ de succès

Paramètre inconnu
$\varphi = ?$

Données connues
0 0 0 1 0
$f = 1/5$

Un échantillon
a été observé
$n = 5$

Démarche inductive : généralisation du connu vers l'inconnu

Paramètre inconnu

$\varphi = ?$

Données connues

0 0 0 1 0

$f = 1/5$

Dans le cadre fréquentiste :

- pas de probabilités
- pas de solution

Inférence fréquentiste : de l'inconnu vers le connu

Données connues
0 1 0 0 0
f = 1/5

Paramètre inconnu
φ = ?

- Toujours pas de solution

Inférence fréquentiste

Données : 0 0 0 1 0 (f = 1/5 = 0.20)

Répétitions imaginaires
de l'expérience

f = 0/5 : 0.00006

f = 1/5 : 0.005

f = 2/5 : 0.068

f = 3/5 : 0.293

f = 4/5 : 0.440

f = 5/5 : 0.194

On a observé un échantillon
parmi 15 503 possibles

Paramètre
Valeur fixée

↳Exemple :

φ = 15/20 = 0.75

Probabilités d'échantillonnage = fréquences

Test de signification fréquentiste

Données
0 0 0 1 0
$f = 0.20$

Hypothèse nulle

Exemple 1 :
$\varphi = 0.75$ (15/20)

Seuil : $\alpha = 0.05$

Répétitions imaginaires de l'expérience

$f = 0/5$: 0.00006
$f = 1/5$: 0.00484
$f = 2/5$: 0.068
$f = 3/5$: 0.293
$f = 4/5$: 0.440
$f = 5/5$: 0.194

0.995

Si $\varphi = 0.75$ on trouve dans 99.5% des expériences une valeur $f > 1/5$ (supérieure à l'observation)

➯ On rejette l'hypothèse nulle $\varphi = 0.75$ (significatif : $p = 0.0049$)

« *What the use of p implies, therefore, is that a hypothesis that may be true may be rejected because it has not predicted observable results that have not occurred* »
Jeffreys (1961)

Test de signification fréquentiste

Données
0 0 0 1 0
$f = 0.20$

Hypothèse nulle

Exemple 2 :
$\varphi = 0.50$ (10/20)

Seuil : $\alpha = 0.05$

Répétitions imaginaires
de l'expérience

$f = 0/5$: 0.0163
$f = 1/5$: 0.1354
$f = 2/5$: 0.3483
$f = 3/5$: 0.3483
$f = 4/5$: 0.1354
$f = 5/5$: 0.0163

0.848

Si $\varphi = 0.50$ on trouve dans 84.8% des expériences
une valeur $f > 1/5$ (supérieure à l'observation)

➯ On ne rejette pas l'hypothèse nulle $\varphi = 0.50$ (non significatif : $p = 0.152$)

Cela ne prouve évidemment pas que $\varphi = 0.50$!

Intervalle de confiance fréquentiste

Données
0 0 0 1 0
$f = 0.20$

Ensemble des valeurs possibles pour φ
qui ne sont pas rejetées au seuil α

Exemple $\alpha = 0.05$
On obtient l'intervalle de « confiance 0.95 » (ou 95%) :
[0.05 , 0.60]

Comment interpréter la confiance 0.95 ?

Interprétation de la confiance fréquentiste ?

Répétitions de l'expérience

$f = 0$	(0/5) ➔ [0 , 0.45]		**0.016**
$f = 0.20$	(1/5) ➔ [0.05 , 0.60]*		**0.135**
$f = 0.40$	(2/5) ➔ [0.10 , 0.75]*		**0.348**
$f = 0.60$	(3/5) ➔ [0,15 , 0.90]*		**0.348**
$f = 0.80$	(4/5) ➔ [0,20 , 0.95]*		**0.135**
$f = 1$	(5/5) ➔ [0.25 , 1]*		**0.016**

*contient la valeur fixée $\varphi = 0.50$

Paramètre
Valeur fixée

Quelle que soit la valeur fixée φ,
dans 95% (au moins) des expériences
l'intervalle contient cette valeur

Exemple : $\varphi = 0.50$ (10/20)

Ne fait pas intervenir les données !

Une interprétation étrange:
Elle ne fait pas intervenir les données connues !

« *Objection has sometimes been made that the method of calculating Confidence Limits by setting an assigned value such as* 1% *on the frequency of observing* 3 *or less (or at the other end of observing* 3 *or more) is unrealistic in treating the values less than* 3, *which have not been observed, in exactly the same manner as the value* 3, *which is the one that has been observed.*

This feature is indeed not very defensible save as an approximation »

Fisher (1990/1973), page 71

Retour à la démarche inductive :
Généralisation du connu vers l'inconnu

Ensemble
des valeurs possibles
du paramètre inconnu

φ = 0/20, 1/20, 2/20… 20/20

Données connues
0 0 0 1 0
$f = 1/5$

Inférence bayésienne

- **Probabilités qui expriment notre incertitude (en *plus* des probabilités d'échantillonnage)**

« *As long as we are uncertain about values of parameters, we will fall into the Bayesian camp* »
Iversen, 2000

Inférence bayésienne

Données
0 0 0 1 0
$f = 1/5$

Toutes les probabilités fréquentistes associées *aux données*

$$\Pr(f = 1/5 \mid \varphi)$$

➥ Fonction de vraisemblance

$\varphi = 0/20 \rightarrow 0$	$\varphi = 10/20 \rightarrow 0.135$
$\varphi = 1/20 \rightarrow 0.250$	$\varphi = 11/20 \rightarrow 0.089$
$\varphi = 2/20 \rightarrow 0.395$	$\varphi = 12/20 \rightarrow 0.054$
$\varphi = 3/20 \rightarrow 0.461$	$\varphi = 13/20 \rightarrow 0.029$
$\varphi = 4/20 \rightarrow 0.470$	$\varphi = 14/20 \rightarrow 0.014$
$\varphi = 5/20 \rightarrow 0.440$	$\varphi = 15/20 \rightarrow 0.005$
$\varphi = 6/20 \rightarrow 0.387$	$\varphi = 16/20 \rightarrow 0.001$
$\varphi = 7/20 \rightarrow 0.323$	$\varphi = 17/20 \rightarrow 0$
$\varphi = 8/20 \rightarrow 0.255$	$\varphi = 18/20 \rightarrow 0$
$\varphi = 9/20 \rightarrow 0.192$	$\varphi = 19/20 \rightarrow 0$
	$\varphi = 20/20 \rightarrow 0$

Inférence bayésienne

probabilités *initiales* (avant l'expérience)

$\Pr(\varphi)$

Exemple

$\Pr(\varphi{=}0/20) = 0.00000001$
$\Pr(\varphi{=}1/20) = 0.0000003$
$\Pr(\varphi{=}2/20) = 0.000005$
$\Pr(\varphi{=}3/20) = 0.00004$
$\Pr(\varphi{=}4/20) = 0.0003$
$\Pr(\varphi{=}5/20) = 0.001$
$\Pr(\varphi{=}6/20) = 0.005$
$\Pr(\varphi{=}7/20) = 0.015$
$\Pr(\varphi{=}8/20) = 0.035$
$\Pr(\varphi{=}9/20) = 0.071$

$\Pr(\varphi{=}10/20) = 0.117$
$\Pr(\varphi{=}11/20) = 0.160$
$\Pr(\varphi{=}12/20) = 0.180$
$\Pr(\varphi{=}13/20) = 0.166$
$\Pr(\varphi{=}14/20) = 0.124$
$\Pr(\varphi{=}15/20) = 0.075$
$\Pr(\varphi{=}16/20) = 0.035$
$\Pr(\varphi{=}17/20) = 0.012$
$\Pr(\varphi{=}18/20) = 0.003$
$\Pr(\varphi{=}19/20) = 0.0005$
$\Pr(\varphi{=}2020) = 0.00004$

Inférence bayésienne

- Probabilities *conjointes* (un simple produit):

$$\Pr(\varphi \textit{ et } f{=}1/5) = \Pr(f{=}1/5 \mid \varphi) \times \Pr(\varphi)$$

Vraisemblance × probabilité initiale

- Probabilités *prédictives* (somme des probabilités conjointes)

$$\Pr(f{=}1/5)$$

Une moyenne pondérée de la fonction de vraisemblance

- Probabilités finales (une simple application de la définition des probabilités conditionnelles)

$$\Pr(\varphi \mid f{=}1/5) = \Pr(\varphi \textit{ et } f{=}1/5) / \Pr(f)$$

Le produit normalisé de l'initiale et de la vraisemblance

UN PEU DE PRATIQUE

ILLUSTRATION DE PROGRAMMES INFORMATIQUES

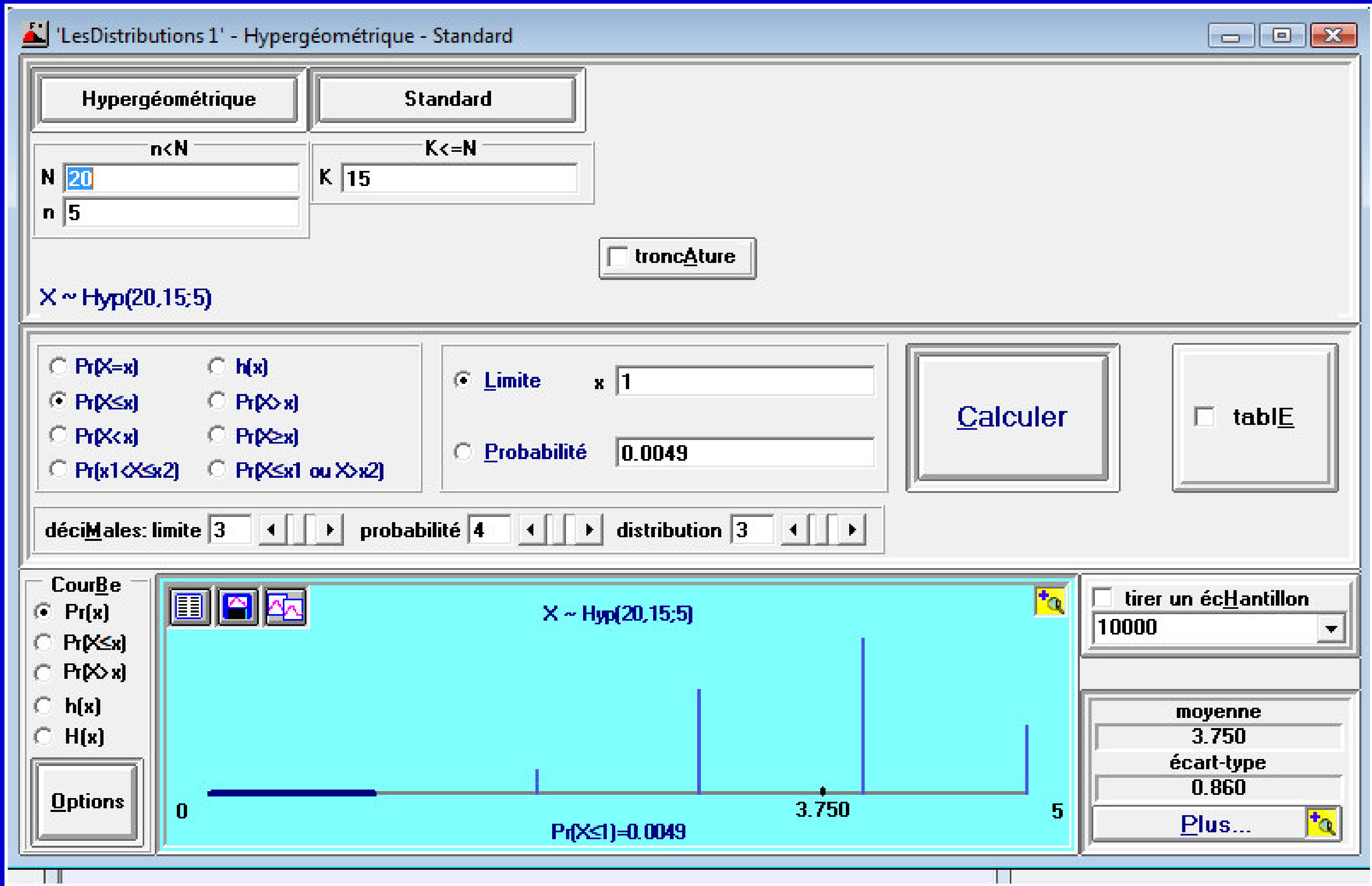
Test de signification fréquentiste

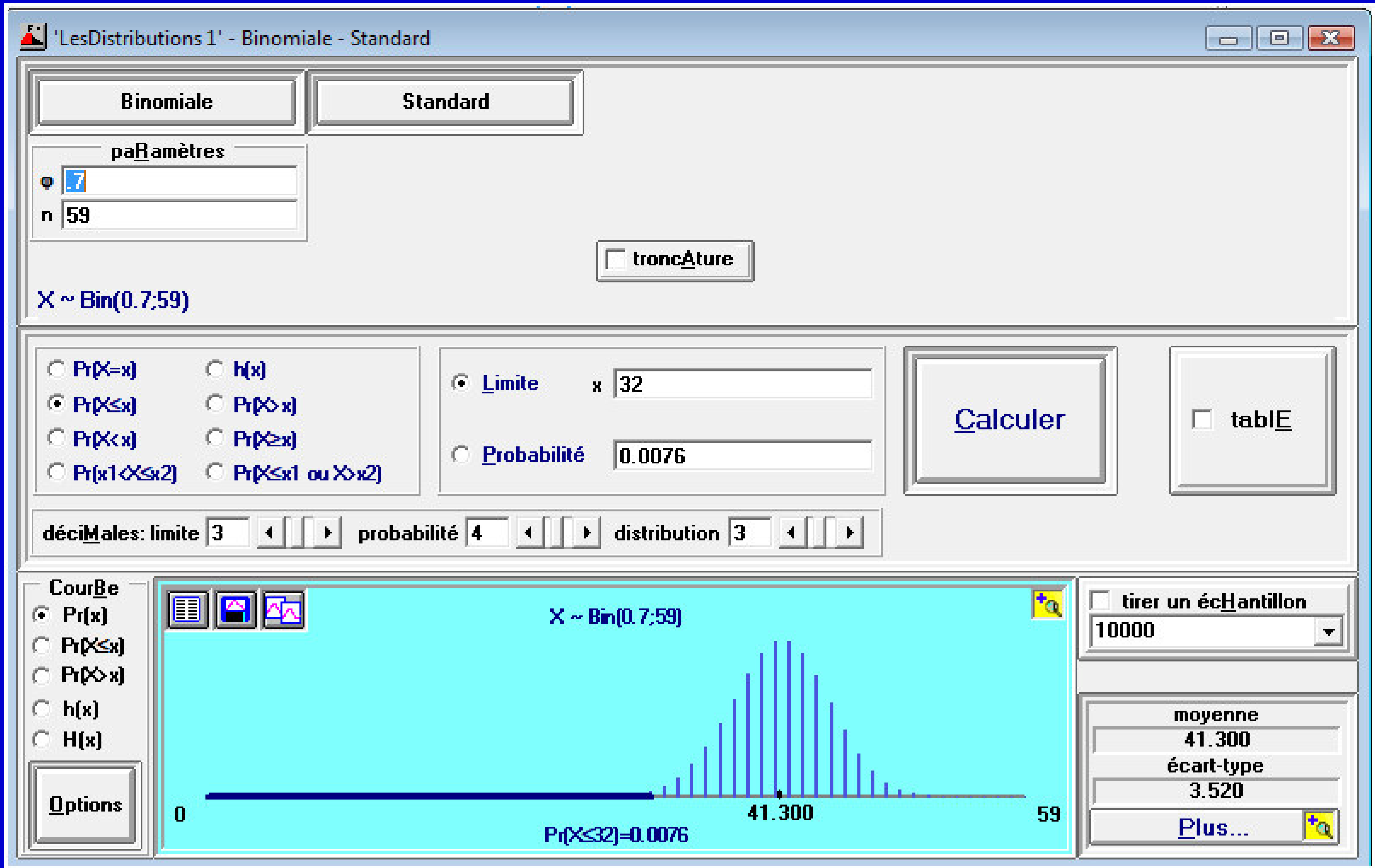
↳ Si on a observé $f = 1/5$,

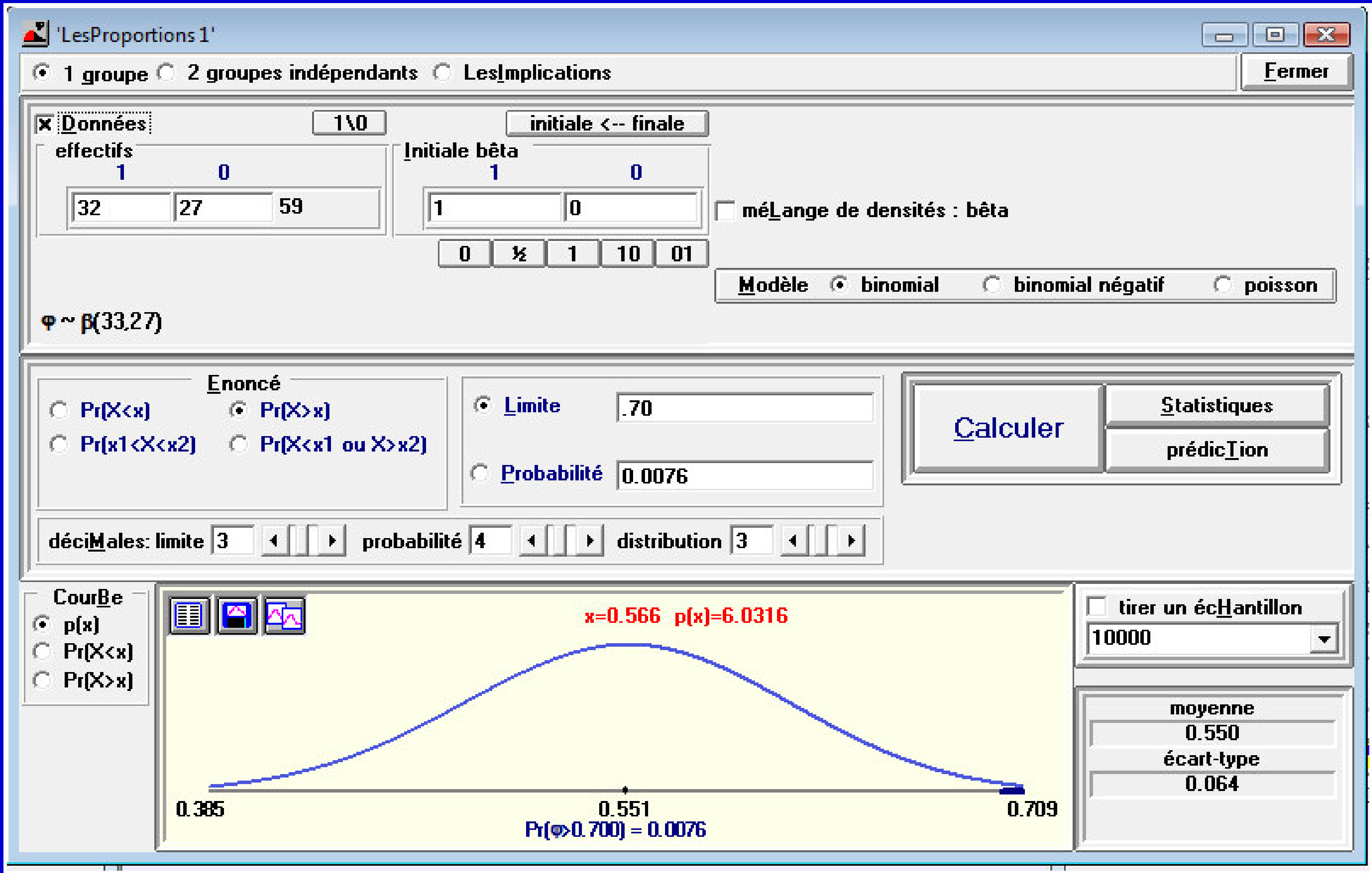
on rejette l'hypothèse nulle $\varphi = 0.75$

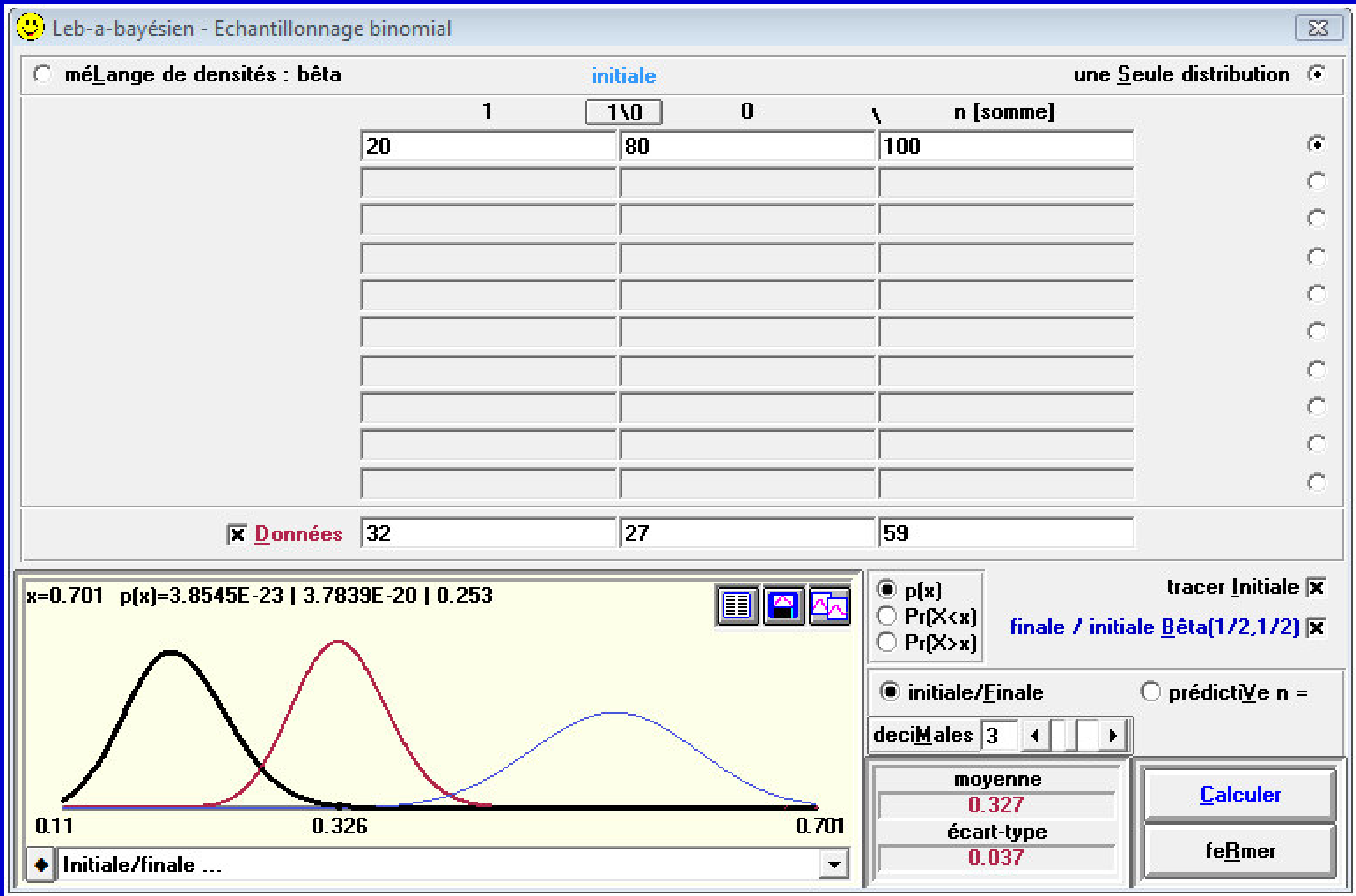
(significatif: $p = 0.00486$)

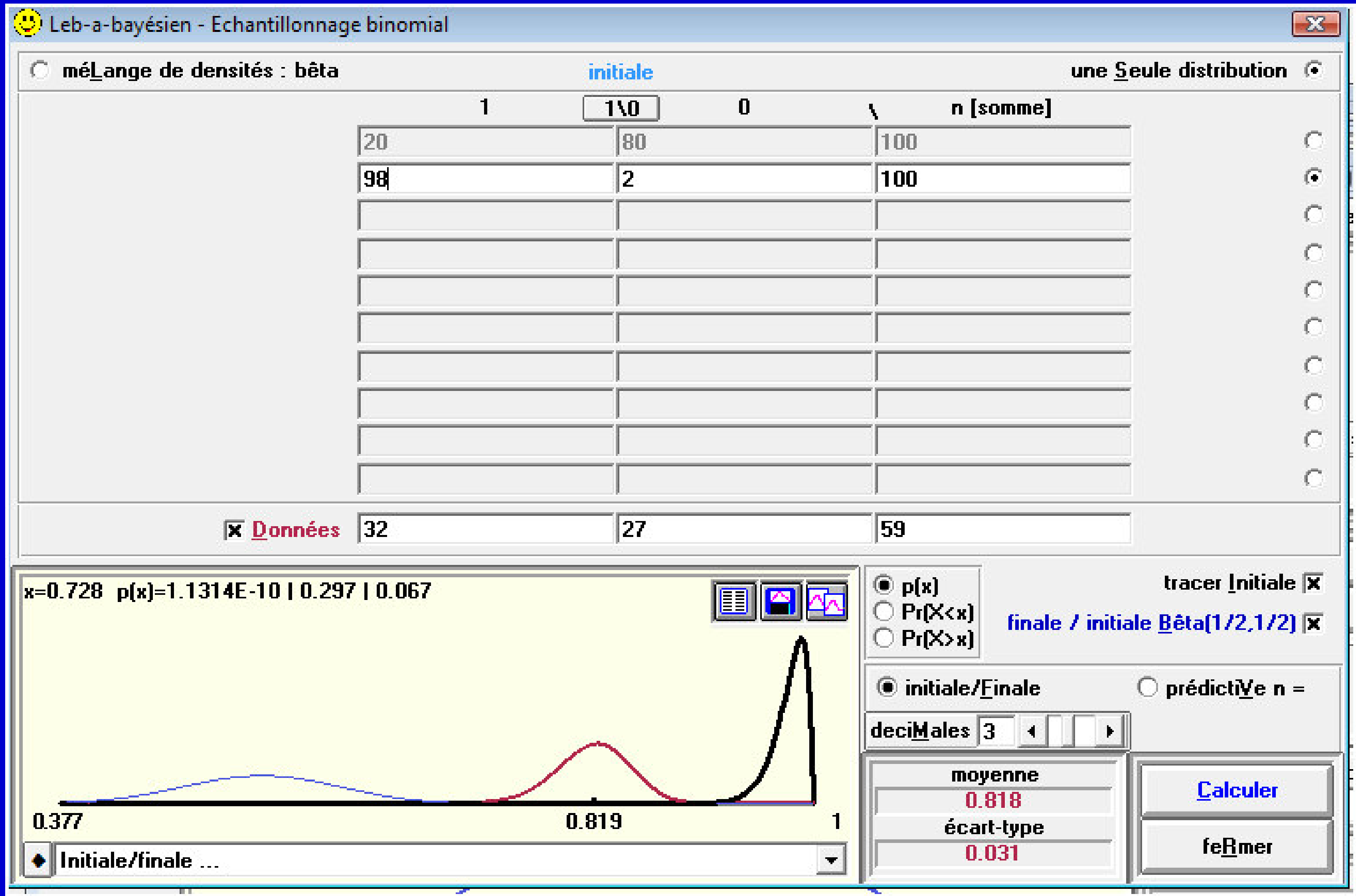
$f = 0/5$: 0.00006
$f = 1/5$: 0.005
$f = 2/5$: 0.068
$f = 3/5$: 0.293
$f = 4/5$: 0.440
$f = 5/5$: 0.194

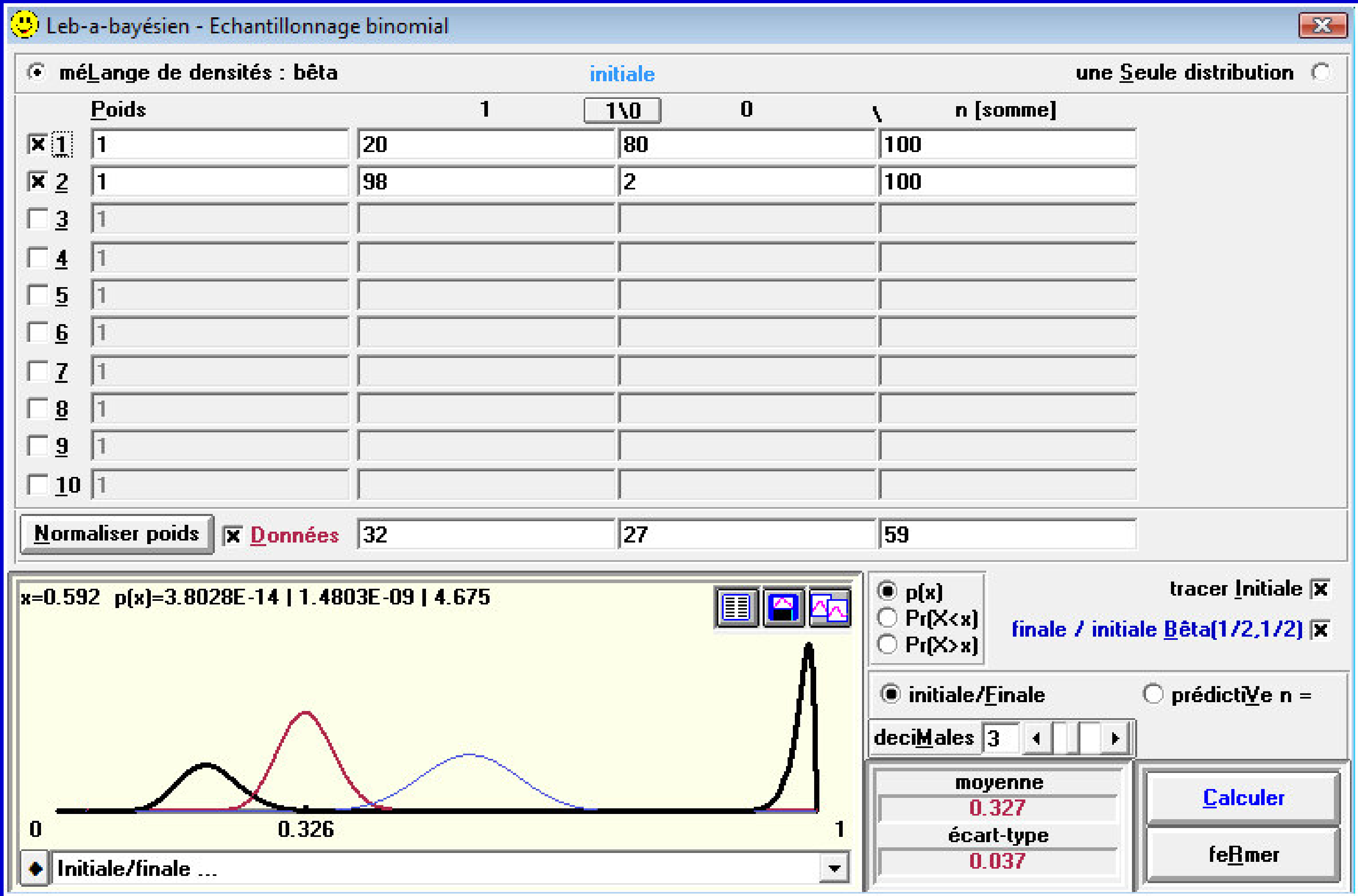


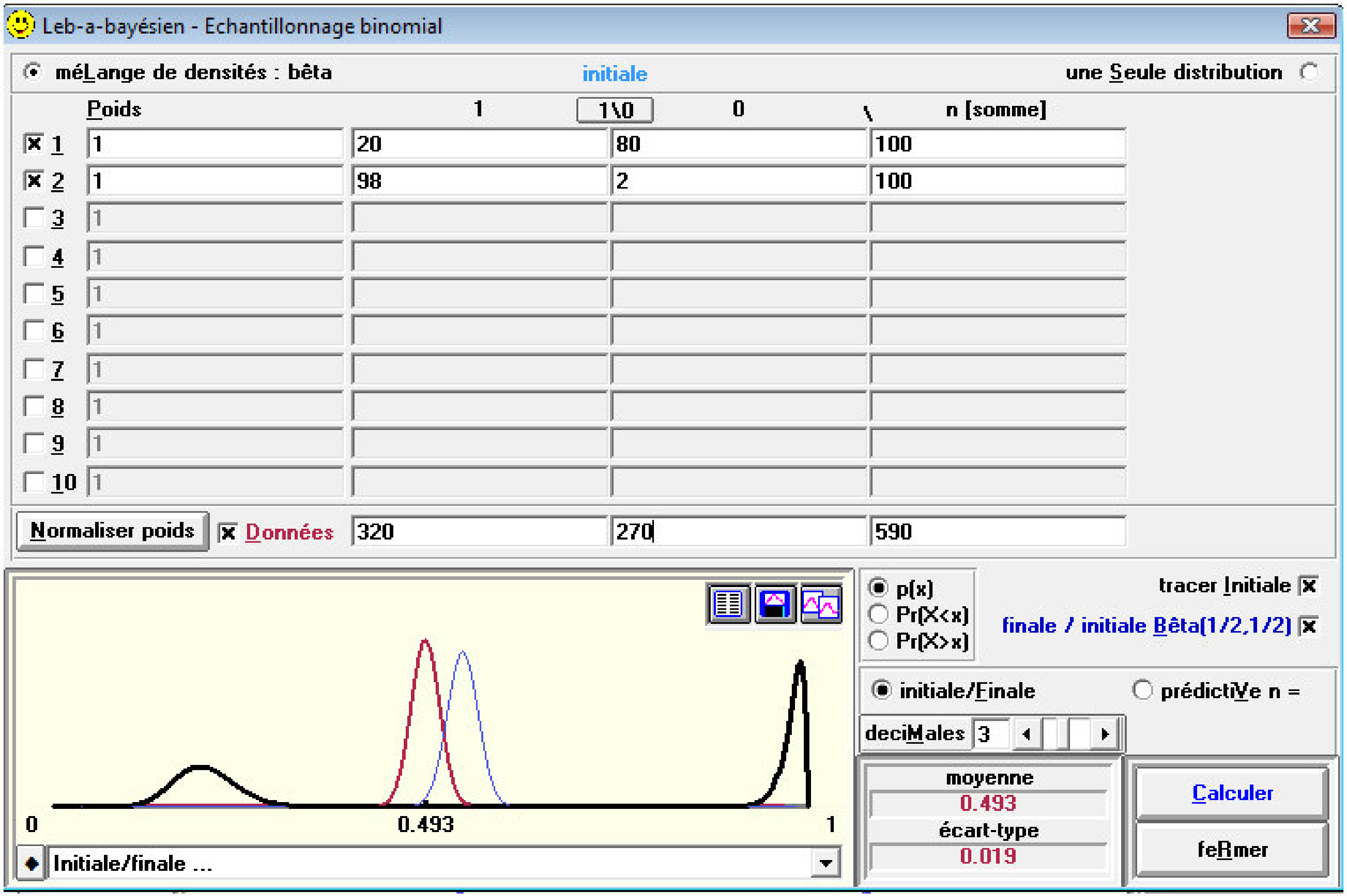

'LesDistributions 1' - Binomiale - Standard
Binomiale
Standard
paRamètres
p .7
n 59
troncAture
X ~ Bin(0.7;59)
Pr(X=x)
h(x)
Pr(X≤x)
Pr(X>x)
Pr(X<x)
Pr(X≥x)
Pr(x1<X≤x2)
Pr(X≤x1 ou X>x2)
Limite
x 32
Probabilité
0.0076
Calculer
tablE
déciMales: limite 3
probabilité 4
distribution 3
CourBe
Pr(x)
Pr(X≤x)
Pr(X>x)
h(x)
H(x)
Options
X ~ Bin(0.7;59)
0
41.300
59
Pr(X≤32)=0.0076
tirer un écHantillon
10000
moyenne
41.300
écart-type
3.520
Plus...


'LesProportions 1'
1 groupe
2 groupes indépendants
LesImplications
Fermer
Données
1\0
initiale <-- finale
effectifs
1
0
32
27
59
Initiale bêta
1
0
1
0
0
½
1
10
01
méLange de densités : bêta
Modèle
binomial
binomial négatif
poisson
φ ~ β(33,27)
Enoncé
Pr(X<x)
Pr(X>x)
Pr(x1<X<x2)
Pr(X<x1 ou X>x2)
Limite
.70
Probabilité
0.0076
Calculer
Statistiques
prédicTion
déciMales: limite
3
probabilité
4
distribution
3
CourBe
p(x)
Pr(X<x)
Pr(X>x)
x=0.566 p(x)=6.0316
0.385
0.551
0.709
Pr(φ>0.700) = 0.0076
tirer un écHantillon
10000
moyenne
0.550
écart-type
0.064


Leb-a-bayésien - Echantillonnage binomial
méLange de densités : bêta
initiale
une Seule distribution
1
1\0
0
n [somme]
20
80
100
Données
32
27
59
x=0.701 p(x)=3.8545E-23 | 3.7839E-20 | 0.253
0.11
0.326
0.701
Initiale/finale ...
p(x)
Pr(X<x)
Pr(X>x)
tracer Initiale
finale / initiale Bêta(1/2,1/2)
initiale/Finale
prédictiVe n =
deciMales 3
moyenne
0.327
écart-type
0.037
Calculer
feRmer


Leb-a-bayésien - Echantillonnage binomial
méLange de densités : bêta
initiale
une Seule distribution
1
1\0
0
n [somme]
20
80
100
98
2
100
Données
32
27
59
x=0.728 p(x)=1.1314E-10 | 0.297 | 0.067
0.377
0.819
1
Initiale/finale ...
p(x)
Pr(X<x)
Pr(X>x)
tracer Initiale
finale / initiale Bêta(1/2,1/2)
initiale/Finale
prédictiVe n =
deciMales 3
moyenne
0.818
écart-type
0.031
Calculer
feRmer


Leb-a-bayésien - Echantillonnage binomial
méLange de densités : bêta
initiale
une Seule distribution
Poids
1
1\0
0
n [somme]
1
1
20
80
100
2
1
98
2
100
3
4
5
6
7
8
9
10
Normaliser poids
Données
32
27
59
x=0.592 p(x)=3.8028E-14 | 1.4803E-09 | 4.675
0
0.326
1
Initiale/finale ...
p(x)
Pr(X<x)
Pr(X>x)
tracer Initiale
finale / initiale Bêta(1/2,1/2)
initiale/Finale
prédictiVe n =
deciMales 3
moyenne
0.327
écart-type
0.037
Calculer
feRmer


Leb-a-bayésien - Echantillonnage binomial
méLange de densités : bêta
initiale
une Seule distribution
Poids
1
1\0
0
n [somme]
1 1 20 80 100
2 1 98 2 100
3 1
4 1
5 1
6 1
7 1
8 1
9 1
10 1
Normaliser poids
Données 320 270 590
0
0.493
1
Initiale/finale ...
p(x)
Pr(X<x)
Pr(X>x)
tracer Initiale
finale / initiale Bêta(1/2,1/2)
initiale/Finale
prédictiVe n =
deciMales 3
moyenne
0.493
écart-type
0.019
Calculer
feRmer

“*It is their straightforward, natural approach to inference that makes them* [Bayesian methods] *so attractive*”

Schmitt (1969)

Bibliographie

Albert, J. (1995). Teaching inference about proportion. Using Bayes and discrete models. *Journal of Statistics Education*, *3*(3) [http://www.amstat.org/publications/jse/v3n3/albert.html].

Albert, J. (1996). *Bayesian computation using Minitab*. Belmont, CA: Duxbury Press.

Albert J. (1997) - Teaching Bayes' rule: a data-oriented approach. *The American Statistician*, *51*, 247-253

Albert, J. (2002). Teaching introductory statistics from a Bayesian perspective. *In* B. Philips (Ed), *Proceedings of the 6th International Conference on Teaching Statistics.* Ciudad del Cabo, Sudáfrica: International Statistical Institute [http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/3f1_albe.pdf].

Albert, J. (2003) - College students' conceptions of probability. *The American Statistician, 57*, 37-45.

Berger, J. (2004). The case for objective Bayesian analysis. *Bayesian Analysis*, *1*, 1-17.

Berry, D. A. (1997) - Teaching elementary Bayesian statistics with real applications in science. *The American Statistician*, *51*, 241-246

Box, G.E.P., & Tiao, G.C. (1973). *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Reading, MA: Addison Wesley.

Boldstad, W.M. (2002). Teaching bayesian statistics to undergraduates: Who, what, where, when, why, and how. *In* B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the 6th International Conference on Teaching Statistics.* Ciudad del Cabo, Sudáfrica: International Statistical Institute [http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/3f2_bols.pdf].

Cumming, G., Williams, J., & Fidler, F. (2004). Replication, and researchers' understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding Statistics*, *3*, 299-311.

D'Agostini, G. (1999). Teaching statistics in the physics curriculum. Unifying and clarifying role of subjective probability. *American Journal of Physics*, *67*, 1260-1268.

Díaz, C & de la Fuente, I. (2007). Assessing students' difficulties with conditional probability and Bayesian reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(3) [http://www.iejme.com/032007/d2.pdf].

Díaz Batanero, C. (2007) - *Viabilidad de la Enseñanza de la Inferencia Bayesiana en el Análisis de Datos en Psicología* (*Suitability of Teaching Bayesian Inference in Data Analysis Courses Directed to Psychologists*). Thèse, Université de Grenade (Espagne) [http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/07.Diaz.pdf]

Feller, W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications* (Vol. 1). New York: Wiley.

Fisher, R. A. (1990). *Statistical Methods and Scientific Inference* (3rd edition). [Re-issue edited by J.H. Bennet with a foreword by F. Yates]. Oxford: Oxford University Press.

Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, 102, 684 – 704.

Iversen, G.R. (2000). Why should we even teach statistics? A Bayesian perspective. IASE Round Table Conference on Training Researchers in the Use of Statistics, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo, 7-11 August, 2000 [http://www.statlit.org/PDF/2000IversenIASE.pdf]

Kurzenhauser, S., & Hoffrage, U. (2002). Teaching Bayesian reasoning: An evaluation of a classroom tutorial for medical students. *Medical Teacher*, *24,* 516-521.

Lawrence, J. (2003). *A Quick Introduction to First Bayes.* Montreal: Mc Gill University [http://www.medicine.mcgill.ca/epidemiology/Joseph/pdf/First.Bayes.pdf].

Lecoutre, B. (2005). Former les étudiants et les chercheurs aux méthodes bayésiennes pour l'analyse des données expérimentales. *La Revue de Modulad*, *33*, 85-107.

Lecoutre, B. (2006). And if you were a Bayesian without knowing it? *In* A. Mohammad-Djafari (Ed.), *26th Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*. Melville : AIP Conference Proceedings Vol. 872, 15-22.

Lecoutre, B. (2006). Training students and researchers in Bayesian methods for experimental data analysis. *Journal of Data Science*, *4,* 207-232.

Lecoutre B. (2008). The Bayesian approach to experimental data analysis. *In* C.R. Rao, J. Miller & D.C. Rao (Eds.), *Handbook of statistics: Epidemiology and Medical Statistics* (Vol 27), Amsterdam: Elsevier, 775-812.

Lecoutre, B., Lecoutre, M.-P., & Grouin, J.-M. (2001). A challenge for statistical instructors : Teaching Bayesian inference without discarding the « official » significance tests. *In Bayesian Methods with Applications to Science, Policy and Official Statistics*, Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities, 311-320 [http://www.stat.cmu.edu/ISBA/117f.pdf].

Lecoutre, B., Lecoutre M.P., & Poitevineau J. (2001). Uses, abuses and misuses of significance tests in the scientific community: Won't the Bayesian choice be unavoidable? *International Statistical Review*, *69,* 399-418.

Lecoutre, M.-P., & Rouanet, H. (1993). Predictive judgments in situations of statistical analysis. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, *54*, 45-56.

Moore, D.S. (1997). Bayes for Beginners? Some pedagogical questions. *In* S. Panchapakesan and N. Balakrishnan (eds.), *Advances in Statistical Decision Theory*, 3-17, Birkhäuser.

Moore, D.S. (1997). Bayes for Beginners? Some reasons to hesitate. *The American Statistician*, *51*, 254-261.

Schmitt, S.A. (1969). *Measuring Uncertainty: An Elementary Introduction to Bayesian Statistics*. Reading, MA: Addison Wesley.

Stangl, D.K. (1998). Classical and Bayesian paradigms: can we teach both? *In Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute [http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/2/Topic2t.pdf].

Tversky, A., & Kahneman, D. (1971). Belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin*, *76*, 237-251.