Théorie bayésienne de la décision

Application à la fabrication industrielle de lardons

Natalie Commeau

Laboratoire de sécurité des aliments

UMR 518 MIA

AgroParisTech ENGREF

09/12/2011

Décision en avenir incertain

- Théorie de la décision en avenir incertain : comment prendre une décision en tenant compte de connaissances partielles ?
- Définir l'ensemble $\mathcal{D}$ des décisions possibles et l'ensemble Ψ des états de la nature (inconnues du problème) ;
- Utilisation d'un critère d'évaluation dépendant de la décision prise et de l'état de la nature ;
- Le critère est appelé *fonction de coût* notée L, définie de $\mathcal{D} \times \Psi$ dans $\mathbb{R}^+$;
- Chaque décision d prise lorsque l'inconnue vaut ψ a un coût (ou une pénalité) $L(\psi, d)$;

Règle de décision

- Inférence statistique : trouver la “meilleure” stratégie d'association d'une décision à une observation malgré la connaissance partielle de ψ
- La décision d dépend de l'observation x au travers d'une *règle de décision* δ définie de l'espace des observations $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{D}$: $\delta : \; x \mapsto d$
- Remarque : Lorsque $\mathcal{D} = \Psi$, δ est un estimateur et souvent $L(\delta(x), \theta) = (\delta(x) - \theta)^2$

Risque bayésien

Si on minimise $L(d, \psi)$ en d, le résultat est dépendant de ψ. L'approche bayésienne considère le coût moyen *a posteriori* de la décision d :

$$\rho(d|x) = \int_{\Psi} L(\psi, d)[\psi|x]d\psi,$$

à minimiser en fonction de d. Pour tout x, un associe une décision d minimisant $\rho(d|x)$. On définit alors une règle bayésienne de décision : $\delta : \; x \mapsto d = Arg \min \rho(d|x)$.
Si une fonction δ minimise ρ pour tout x de $\mathcal{X}$, alors elle minimise également le *risque bayésien* $r(\delta) = \int_{\mathcal{X}} \int_{\Psi} L(\psi, \delta)[\psi|x][x]d\psi dx$.

Meilleure décision et regret

Si ψ était connue, alors la meilleure décision serait $d^\star = \delta^\star(\psi) = Arg\min L(\psi, d)$:
On cherche la décision d qui minimise $\underline{L}(\psi, \delta(x)) = L(\psi, d) - L(\psi, d^\star)$ intégrée sur ψ et x. La fonction $\underline{L}$ est appelée *regret* par rapport au coût optimal dû à la méconnaissance de ψ, avec $\underline{L}(\psi, \delta(x)) \geq 0$.
La décision qui minimise L minimise également $\underline{L}$.

Analyse prédictive

Si les données x n'ont pas encore été observées :

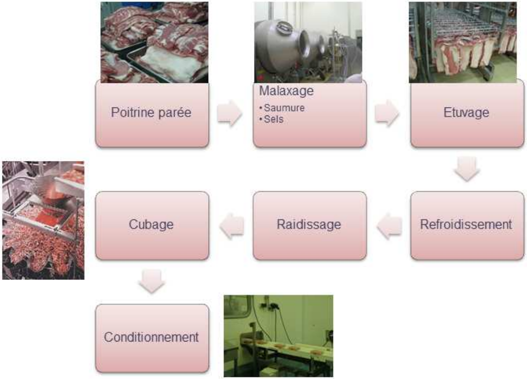
- Choisir l'expérimentation e qui fournira x_e
- La règle de décision δ_e associe une décision à prendre après une observation x_e ;
- Recherche de la décision qui minimise $r(\delta_e) = \int \int L(\psi, \delta_e(x))[\psi, x] d\psi dx$

Spécifications requises

1. Ensemble Ψ des états de la nature ainsi que la distribution *a priori* de ψ notée $[\psi]$;
2. Dispositif expérimental e ;
3. Ensemble $\mathcal{X}$ des observations et la famille des distributions pour les observations, notées $[x|\psi]$ (c'est le modèle statistique) ;
4. Ensemble $\mathcal{D}$ des décisions ;
5. Fonction de coût L associée aux décisions et aux états de la nature.

Points difficiles : 1, 4 et 5.

Procédé de fabrication



Lot

- *Lot* au sens statistique : comportement “répétitif”, même distribution de probabilité
- Décision usuelle : acceptation ou rejet du lot
- Dans ce cas présent : pas de contrôle libératoire, tous les lots de production ne sont pas analysés
- Dans le cas présent le *lot* est une période de production d'une durée déterminée

Etats de la nature, observations et décisions

- ψ : prévalence d'une période, $\Psi = [0;1]$ et $[\psi] = \mathcal{B}eta(a,b)$
- Dispositif expérimental : nombre d'observations n durant une période ;
- Observations : nombre de détections positives x parmi n analysées, $\mathcal{X} = [0:n]$, $[x|\psi,n] = \mathcal{B}in(n,\psi)$
- Décision d_i

$$\begin{cases} d_0, & \text{fonctionnement normal} \\ d_1, & \text{une action corrective mineure est apportée} \\ d_2, & \text{une action corrective majeure est apportée} \end{cases}$$

Exemple de fonction de coût L

A chaque décision et à chaque valeur de ψ correspond un coût :

ψ \ Décisions	d_0	d_1	d_2
$\psi \in \Psi_0$	0	r	R
$\psi \in \Psi_1$	0	r	R
$\psi \in \Psi_2$	0	r	R

- r et R : coût de la mise en œuvre d'une a.c. mineure et d'une a.c. majeure

Exemple de fonction de coût L

A chaque décision et à chaque valeur de ψ correspond un coût :

ψ \ Décisions	d_0	d_1	d_2
$\psi \in \Psi_0$	$0 + 0$	$r + 0$	$R + 0$
$\psi \in \Psi_1$	$0 + pb$	$r + pb_1$	$R + pb_2$
$\psi \in \Psi_2$	$0 + PB$	$r + PB_1$	$R + PB_2$

- r et R : coût de la mise en œuvre d'une a.c. mineure et d'une a.c. majeure
- pb et PB : coûts consécutifs à une prévalence moyenne et à une prévalence élevée

Scénarios et estimation des coûts

- Action corrective mineure (r) : Nettoyage renforcé pendant une semaine et 20 lots de chaque fournisseur contrôlés → 4250 € ;
- Action corrective majeure (R) : fermeture de l'usine pendant 24h et nettoyage intégral de l'usine et des appareils → 14000 € ;
- Le client détecte que la prévalence est moyenne :
  - Si l'entreprise n'a effectué aucune a.c., pénalité et 10 analyses supplémentaires → pb=4200 €
  - Si l'entreprise a effectué une a.c. mineure, seulement 5 analyses → pb_1=4100 €
  - Si l'entreprise a effectué une a.c. majeure, seulement pas d'analyse → pb_2=4000 €

Scénarios et estimation des coûts (2)

- Le client détecte que la prévalence est forte :
  - Si l'entreprise n'a effectué aucune a.c., pénalité, rappel du lot incriminé, contrôle libératoire pendant 1 mois et audit du client $\rightarrow PB$=64050 €
  - Si l'entreprise a effectué une a.c. mineure, idem sauf l'audit $\rightarrow PB_1$=63050 €
  - Si l'entreprise a effectué une a.c. majeure, idem sauf l'audit et le contrôle libératoire $\rightarrow PB_2$=55050 €

Valeurs numériques de la fonction de coût

ψ \ Décisions	d_0	d_1	d_2
$\psi \in \Psi_0$	0	4250	14000
$\psi \in \Psi_1$	4200	8350	18000
$\psi \in \Psi_2$	64050	67300	69050

Valeurs numériques de la fonction regret

ψ \ Décisions	d_0	d_1	d_2
$\psi \in \Psi_0$	0	4250	14000
$\psi \in \Psi_1$	-4150	0	9650
$\psi \in \Psi_2$	-5000	-1750	0

Valeurs numériques de la fonction regret

ψ \ Décisions	d_0	d_1	d_2
$\psi \in \Psi_0$	0	4250	14000
$\psi \in \Psi_1$	-4150	0	9650
$\psi \in \Psi_2$	-5000	-1750	0

Avec ces coûts, quelle que soit la prévalence, la décision d_0 est la moins coûteuse pour l'entreprise, donc autant ne pas échantillonner !

Pourquoi le regret est-il négatif ?

- La diminution des pénalités lorsque d_1 ou d_2 sont prises ne compense pas l'augmentation des coûts dus aux décisions d_1 et d_2
  - ex : $pb - pb_1 = 100$ € alors que r=4250€
- Difficulté d'exprimer des coûts cohérents en avenir certain
- L'échantillonnage n'a pas été mis en place avec une approche économique

Autre approche pour la fonction de coût

A chaque décision et à chaque type de prévalence correspond un coût :

Décisions / ψ	d_0 (fonctionnement normal)	d_1 (a. c. mineure nécessaire)	d_2 (a. c. majeure nécessaire)
Prévalence faible	0	r	R
Prévalence moyenne			
Prévalence forte			

- Chaque décision engendre un coût intrinsèque : coût lorsque la prévalence est faible

Autre approche pour la fonction de coût

A chaque décision et à chaque type de prévalence correspond un coût :

Décisions / ψ	d_0 (fonctionnement normal)	d_1 (a. c. mineure nécessaire)	d_2 (a. c. majeure nécessaire)
Prévalence faible	0		
Prévalence moyenne	pb		
Prévalence forte	PB		

- Chaque état sanitaire engendre un coût : coût lorsque la décisions d_0 est prise

Autre approche pour la fonction de coût

A chaque décision et à chaque type de prévalence correspond un coût :

ψ \ Décisions	d_0 (fonctionnement normal)	d_1 (a. c. mineure nécessaire)	d_2 (a. c. majeure nécessaire)
Prévalence faible	$0 + 0$	$r + 0$	$R + 0$
Prévalence moyenne	$0 + pb$		
Prévalence forte	$0 + PB$		

Autre approche pour la fonction de coût

A chaque décision et à chaque type de prévalence correspond un coût :

ψ \ Décisions	d_0 (fonctionnement normal)	d_1 (a. c. mineure nécessaire)	d_2 (a. c. majeure nécessaire)
Prévalence faible	$0 + 0$	$r + 0$	$R + 0$
Prévalence moyenne	$0 + \ pb$	$r + \alpha\ pb$	$r + \beta\ pb$
Prévalence forte	$0 + PB$	$r + \alpha\ PB$	$r + \beta\ PB$

- Hypothèse : les décisions d_1 et d_2 diminuent l'impact du coût lié à l'impact sanitaire
- $0 < \beta < \alpha < 1$.

Exemple de valeurs numériques

$\alpha = 0,3$ et $\beta = 0,15$

ψ \ Décisions	d_0	d_1	d_2
$\psi \in \Psi_0$	0	4 250	14 000
$\psi \in \Psi_1$	90	0	8 820
$\psi \in \Psi_2$	62 542	3 757	0

loi *a posteriori* et loi marginale

Avec, $\psi \sim \mathcal{B}eta(a;b)$ et $x|\psi \sim \mathcal{B}in(n,\psi)$, alors $[\psi|x] = \mathcal{B}eta(a+x;b+n-x)$ et

$$\begin{aligned}[x] &= \frac{[\psi][x|\psi]}{[\psi|x]} \\ &= \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+x)\Gamma(b+n-x)\Gamma(n+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a+b+n)\Gamma(n-x+1)\Gamma(x+1)},\end{aligned}$$

avec $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$.
Remarque : La v.a. X suit la loi dite de Polya (probabilité que l'urne ait $a+x$ boules blanches au bout de n tirages avec a boules blanches et b boules noires initialement).

Calcul de la fonction de regret et du coût moyen *a posteriori*

	d_0	d_1	d_2
$\psi \in \Psi_0$	0	K(0,1)	K(0,2)
$\psi \in \Psi_1$	K(1,0)	0	K(1,2)
$\psi \in \Psi_2$	K(2,0)	K(2,1)	0

$$\begin{aligned}\underline{L}(\psi,\delta_n(x)) &= 1_{\delta_n(x)=d_0}(K(1,0)1_{\psi\in\Psi_1}+K(2,0)1_{\psi\in\Psi_2})\\ &\quad +1_{\delta_n(x)=d_1}(K(0,1)1_{\psi\in\Psi_0}+K(2,1)1_{\psi\in\Psi_2})\\ &\quad +1_{\delta_n(x)=d_2}(K(0,2)1_{\psi\in\Psi_0}+K(1,2)1_{\psi\in\Psi_1}).\end{aligned}$$

En intégrant selon ψ :

$$\begin{aligned}\int \underline{L}(\delta(x),\psi)[\psi|x,n]d\psi &= 1_{\delta_n(x)=d_0}(K(1,0)P_1+K(2,0)P_2)\\ &\quad +1_{\delta_n(x)=d_1}(K(0,1)P_0+K(2,1)P_2)\\ &\quad +1_{\delta_n(x)=d_2}(K(0,2)P_0+K(1,2)P_1),\end{aligned}$$

avec $P_i=\mathbb{P}(\psi\in\Psi_i|x,n)$, $i=0,\dots,2$.

Calcul de la probabilité *a posteriori*

$$\begin{aligned} P_0 &= \int_0^{\psi_0} [\psi|x,n] d\psi \\ &= I_{\psi_0}(a+x, b+n-x), \end{aligned}$$

où $I_\alpha(k,l)$ est la fonction de répartition d'une loi beta de paramètres k et l calculée en α. De même,

$$\begin{aligned} P_1 &= I_{\psi_1}(a+x, b+n-x) - I_{\psi_0}(a+x, b+n-x) \\ P_2 &= 1 - I_{\psi_1}(a+x, b+n-x). \end{aligned}$$

Décisions et seuils

La règle de décision apparaît naturellement :

- $\delta_n(x) = d_0, \;\Leftrightarrow\; x \leq c_1$;
- $\delta_n(x) = d_1, \;\Leftrightarrow\; c_1 < x \leq c_2$;
- $\delta_n(x) = d_2, \;\Leftrightarrow\; x > c_2$.

$$\begin{aligned} & L(d_0,\psi) = K(1,0)\mathbb{P}(\psi \in \Psi_1|X = c_1, n) + K(2,0)\mathbb{P}(\psi \in \Psi_2|X = c_1, n) \\ \leq\; & L(d_1,\psi) = K(0,1)\mathbb{P}(\psi \in \Psi_0|X = c_1, n) \\ & +K(2,1)\mathbb{P}(\psi \in \Psi_2|X = c_1, n) \end{aligned}$$

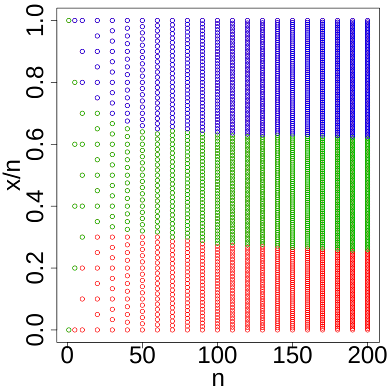
et

$$\begin{aligned} & L(d_0,\psi) = K(1,0)\mathbb{P}(\psi \in \Psi_1|X = c_1+1, n) \\ & +K(2,0)\mathbb{P}(\psi \in \Psi_2|X = c_1+1, n) \\ >\; & L(d_1,\psi) = K(0,1)\mathbb{P}(\psi \in \Psi_0|X = c_1+1, n) \\ & +K(2,1)\mathbb{P}(\psi \in \Psi_2|X = c_1+1, n) \end{aligned}$$

De plus, c_1 et c_2 dépendent de n.

Décisions et seuils

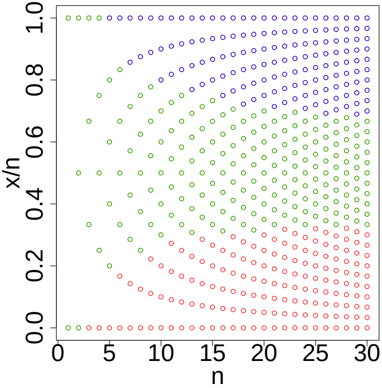
$\psi \sim \mathcal{B}eta(2;3)$ $\Psi_0 = [0;0,2]$,
$\Psi_1 =]0,2;0,6]$ et
$\Psi_2 =]0,6;1]$.



Décision prise en fonction de la taille n des échantillons prélevés et de la prévalence x/n déterminée par par les analyses. Le point est rouge lorsque la décision d_0 est prise, vert lorsque d_1 est prise et bleu lorsque d_2 est prise.

Décisions et seuils

$\psi \sim \mathcal{B}eta(2;3)$ $\Psi_0 = [0;0,2]$,
$\Psi_1 =]0,2;0,6]$ et
$\Psi_2 =]0,6;1]$.



Décision prise en fonction de la taille n des échantillons prélevés et de la prévalence x/n déterminée par par les analyses. Le point est rouge lorsque la décision d_0 est prise, vert lorsque d_1 est prise et bleu lorsque d_2 est prise.

Calcul du risque bayésien

$$
\begin{aligned}
\underline{r}(\delta_n) &= C \times n + \int \left(\int \underline{L}(\delta_n(x), \psi)[\psi|x,n]d\psi \right) [x]dx \\
&= C \times n \\
&\quad + \sum_{x=0}^{c_1} (K(1,0)P_1 + K(2,0)P_2)[X = x] \\
&\quad + \sum_{x=c_1+1}^{c_2} (K(0,1)P_0 + K(2,1)P_2)[X = x] \\
&\quad + \sum_{x=c_2+1}^{n} (K(0,2)P_0 + K(1,2)P_1)[X = x]
\end{aligned}
$$

Optimum global

Le coût d'une analyse est fixé à $C = 20€$.

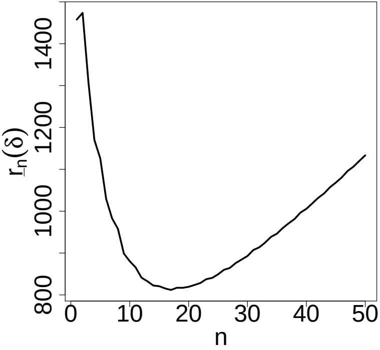


FIGURE: Risque bayésien $\underline{r}(\delta_n)$ en fonction de n. Le minimum est atteint pour $n = 17$ ($c_1 = 5$ et $c_2 = 12$).

Discussion sur les hypothèses du modèle

- Période à considérer :
  - Un contrôle effectué par le client
  - Une décision prise par l'entreprise
  - Prévalence constante
- Hypothèse osée : le client détecte la vraie prévalence de la période
  - Le client ne connaît pas la prévalence mais l'estime
  - Ajout d'une couche d'incertitude

Discussion sur les hypothèses du modèle

- Cette approche intéresse les industriels du secteur agro-alimentaire : souhait d'un logiciel “presse boutons”
    - Problème déontologique
- Attention, la généralisation n'est pas forcément aisée
    - Le lot : quantité naturelle pour le statisticien (le modèle suppose une stationnarité), il peut être différent du lot pour l'entreprise
    - Choix de la loi *a priori*
    - Fonction de coût : difficile à éliciter, même en avenir certain
    - Supposition : pas d'aversion au risque alors que l'utilité n'est vraisemblablement pas linéaire